

گام سوم: حالا باید انتگرال مقابل را حساب کنیم:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)(\sqrt{2} dx dy) = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

از طرفی همان طور که در گام اول گفتیم، میدان D ، دایره $x^2 + y^2 = 1$ است و با توجه به این که زیر انتگرال، عبارت $x^2 + y^2$ وجود دارد، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم. در این دستگاه $dx dy = r dr d\theta$ و با توجه به اینکه ناحیه دایره واحد است، پس $0 \leq r \leq 1$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، لذا داریم:

$$I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \times \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = \sqrt{2} [\theta]_0^{2\pi} \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \sqrt{2} \times 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۵: فرض کنید Σ قسمتی از مخروط به معادله $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ، مقدار $\iint_{\Sigma} z^2 d\sigma$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۴)

(۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xOy در نظر می‌گیریم. در این صورت ناحیه تصویر دایره‌ای $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ می‌باشد و برای مخروط داده شده $d\sigma$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{1 + 1} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

$$\iint_{\Sigma} z^2 d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2) r dr d\theta = \sqrt{2} \left(\frac{r^4}{4} \right)_1^2 (2\pi) = \sqrt{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) (2\pi) = \frac{15\sqrt{2}\pi}{2}$$

پس داریم:

مثال ۶: انتگرال سطح $I = \iint_S \text{Ln} z ds$ ، در صورتی که S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ قرار دارد، چند برابر $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ است؟

(۱) $8\text{Ln}3 + 2$ (۲) $8\text{Ln}2 + 3$ (۳) $8\text{Ln}3 - 2$ (۴) $8\text{Ln}2 - 3$

پاسخ: گزینه «۴» برای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، داریم $ds = \sqrt{2} dA$ ، از برخورد مخروط با صفحات $z = 1$ و $z = 2$ به دایره‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ می‌رسیم. چون $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، لذا تابع تحت انتگرال به صورت $\text{Ln} z = \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2 + y^2)$ در می‌آید. همچنین ناحیه انتگرال‌گیری بین دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد، پس از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در ناحیه‌ی بین این دو دایره داریم: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $1 \leq r \leq 2$.

$$I = \iint_S \text{Ln} z ds = \iint_S \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2 + y^2) (\sqrt{2}) dx dy$$

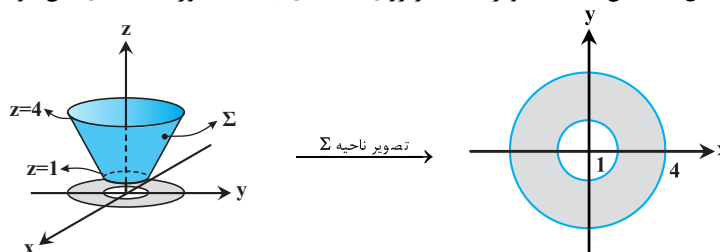
$$\xrightarrow{\text{قطبی}} I = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (\text{Ln} r^2) r dr d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (2 \text{Ln} r) r dr d\theta = \sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_1^2 r \text{Ln} r dr \right)$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2} \times 2\pi \times \left(\frac{r^2}{2} \text{Ln} r - \frac{r^2}{4} \right) \Big|_1^2 = 2\pi\sqrt{2} \left(2\text{Ln}2 - \frac{3}{4} \right) = 2\pi\sqrt{2} \left(2\text{Ln}2 - \frac{3}{4} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (8\text{Ln}2 - 3)$$

مثال ۷: فرض کنید Σ قسمتی از سطح مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 4$ قرار دارد. حاصل $I = \iint_{\Sigma} x^2 z d\sigma$ چند برابر $\frac{\pi}{5}$ است؟

(۱) $1024\sqrt{2}$ (۲) $1023\sqrt{2}$ (۳) $1000\sqrt{2}$ (۴) $1018\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» همان طور که در شکل مشخص است، تصویر ناحیه بر روی صفحه‌ی xOy به صورت ناحیه‌ی بین دو دایره است:



برای رسیدن به ناحیه سمت راست با تلاقی دادن هر یک از صفحات با مخروط داریم:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1, \quad \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

با توجه به اینکه مخروط بالای صفحه xOy است (در صورت سؤال گفته شده بین $z = 1$ و $z = 4$ قرار دارد) پس $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dA = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dA = \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} dA = \sqrt{2} dA$$